Correction de l'examen nationale de baccalauréat

Session normale 2017

Science math (a) et (b) option français

CHIMIE (7points) :

Partie I : Etude d'une solution aqueuse d'acide méthanoïque

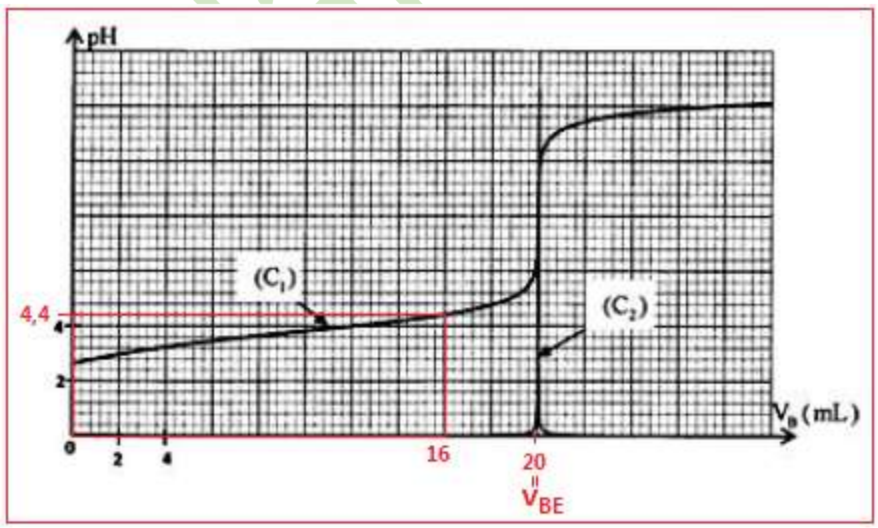
1- Détermination du pK_A par dosage

1-1- L'équation chimique du dosage :

$$HCOOH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \longrightarrow HCOO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$$

1-2- Le volume V_{BE} :

Graphiquement $V_{BE} = 20\ mL$



La concentration C :

La relation d'équivalence :

$$C.V_A = C_B.V_{BE} \Longrightarrow C = \frac{C_B.V_{BE}}{V_A}$$

$$C = \frac{0{,}1 \times 20}{50} = 4.10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

1-3- Vérification de la valeur de p :

La relation de la dilution : $C_0.V_0 = C.V_s \Longrightarrow C_0 = \frac{C.V_S}{V_0} = \frac{4.10^{-2}\times 1}{2.10^{-3}} = 20\ mol.L^{-1}$

$p = \frac{m_A}{m_S} \Longrightarrow m_A = p.m_S$: m_A est le masse de l'acide pur qui se trouve dans la masse m_S de la solution commerciale de volume V_0.

$$\begin{cases} \rho_{sol} = \dfrac{m_s}{V_0} \\ d = \dfrac{\rho_{sol}}{\rho_{eau}} \end{cases} \Longrightarrow \rho_{sol} = d.\rho_{eau} = \frac{m_s}{V_0} \quad \Longrightarrow m_s = p.d.\rho_{eau}.V_0$$

$$C_0 = \frac{n_0}{V_0} = \frac{m_A}{M.V_0} = \frac{p.m_S}{M.V_0} = \frac{p.d.\rho_{eau}.V_0}{M.V_0} = \frac{p.d.\rho_{eau}}{M}$$

$$p = \frac{C_0.M}{d.\rho_{eau}} \Longrightarrow p = \frac{20 \times 46}{1{,}15 \times 10^3} = 0{,}8 \Longrightarrow p = 80\%$$

1-4- L'espèce prédominante dans le mélange réactionnel :

Tableau de variation :

Equation de la réaction		$HCOOH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \longrightarrow HCOO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$			
L'état	avancement	Quantité de matière en (mol)			
initial	0	$C.V_A$	$C_B.V_B$	0	0
intermédiaire	x	$C.V_A - x$	$C_B.V_B - x$	x	x
final	x_f	$C.V_A - x_f$	$C_B.V_B - x_f$	x_f	x_f

$$[HCOOH] = \frac{C.V_A - x}{V_A + V_B} \quad ; \quad [HCOO^-] = \frac{x}{V_A + V_B}$$

$$C_B.V_B - x = [HO^-].(V_A + V_B) \quad \Leftarrow \quad [HO^-] = \frac{C_B.V_B - x}{V_A + V_B}$$

$$x = C_B.V_B - [HO^-].(V_A + V_B)$$

$$K_e = [HO^-].[H_3O^+] \implies [HO^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]} = \frac{K_e}{10^{-pH}} = K_e.10^{pH}$$

$$x = C_B.V_B - K_e.10^{pH}.(V_A + V_B)$$

Graphiquement $V_B = 16\,mL \;\rightarrow\; pH = 4{,}4$

$$x = 0{,}1 \times 50.10^{-3} - 10^{-14} \times 10^{4{,}4} \times (50 + 16).10^{-3} = 1{,}6.10^{-3}\,mol$$

$$\frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]} = \frac{x}{C.V_A - x} = \frac{1{,}6.10^{-3}}{4.10^{-2} \times 50 \times 10.10^{-3} - 1{,}6.10^{-3}} = 4 > 1$$

Puisque $[HCOO^-] > [HCOOH]$, l'espèce prédominante dans le mélange réactionnel est $HCOO^-$.

-La valeur du pK_A du couple ($\boldsymbol{HCOOH_{(aq)}/HCOO^-_{(aq)}}$) :

$$pK_A = pH + log\frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]}$$

$$pH = pK_A - log\frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]}$$

$$pK_A = 4{,}4 - log4 \implies \boldsymbol{pK_A \approx 3{,}8}$$

2- Détermination du pK_A par conductimétrie :

2-1- Equation chimique de la réaction de l'acide avec l'eau :

$$\boldsymbol{HCOOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftarrows HCOO^-_{(aq)} + H_2O^+_{(aq)}}$$

2-2- L'expression de x_f :

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$\boldsymbol{HCOOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftarrows HCOO^-_{(aq)} + H_2O^+_{(aq)}}$
avancement	avancement	Quantité de matière en (mol)

L'état	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{C.V_1}$	0	0	$\mathbf{0}$
initial	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{C.V_1 - x}$	x	x	$\boldsymbol{x}$
intermédiaire	$\boldsymbol{x_f}$	$\boldsymbol{C.V_1 - x_f}$	x_f	x_f	$\boldsymbol{x_f}$

$$\sigma = \lambda_{H_3O^+}.[H_3O^+] + \lambda_{HCOO^-}.[HCOO^-]$$

D'après le tableau d'avancement: $n_f(H_3O^+) = n_f(HCOO^-) = x_f$

$$[H_3O^+]_f = [HCOO^-]_f = \frac{x_f}{V_1}$$

$$\sigma = [H_3O^+]_f(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{HCOO^-})$$

$$[H_3O^+]_f = \frac{\sigma}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{HCOO^-}}$$

$$x_f = \frac{\sigma.V_1}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{HCOO^-}}$$

2-3- Montrons que $\tau = 6{,}2\%$:

$$\tau = \frac{x_f}{xmax}$$

L'acide est utilisé en excès : $C.V_1 - x_{max} = 0 \Longrightarrow x_{max} = C.V_1$

$$\tau = \frac{x_f}{xmax} = \frac{\frac{\sigma.V_1}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{HCOO^-}}}{C.V_1} = \frac{\sigma}{C.(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{HCOO^-})}$$

A.N : $C = 4{,}2.10^{-2}\ mol.L^{-1} = 4{,}2.10^{-2} \times 10^3\ mol.m^{-3}$

$$\tau = \frac{0{,}1}{(3{,}5.10^{-2} + 5{,}46.10^{-3}) \times 4.10^{-2} \times 10^3} = 6{,}18.10^{-2}$$

$$\boldsymbol{\tau \approx 6{,}2\%}$$

2-4- L'expression du pK_A en fonction de C et τ :

$$K_A = \frac{[H_3O^+]_f.[HCOO^-]_f}{[HCOOH]_f}$$

$$\begin{cases} [H_3O^+]_f = [HCOO^-]_f = \dfrac{x_f}{V_1} \\ [HCOOH]_f = \dfrac{C.V_1 - x_f}{V_1} = C - \dfrac{x_f}{V_1} = C - [H_3O^+]_f \end{cases}$$

$$\tau = \frac{x_f}{xmax} = \frac{[H_3O^+]_f.V_1}{C.V_1} = \frac{[H_3O^+]_f}{C} \Longrightarrow [H_3O^+]_f = C.\tau$$

$$K_A = \frac{[H_3O^+]_f.[H_3O^+]_f}{C - [H_3O^+]_f} = \frac{{[H_3O^+]_f}^2}{C - [H_3O^+]_f} = \frac{(C.\tau)^2}{C - C.\tau} = \frac{C.\tau^2}{1 - \tau}$$

$$pK_A = -log\frac{C.\tau^2}{1-\tau}$$

A.N :

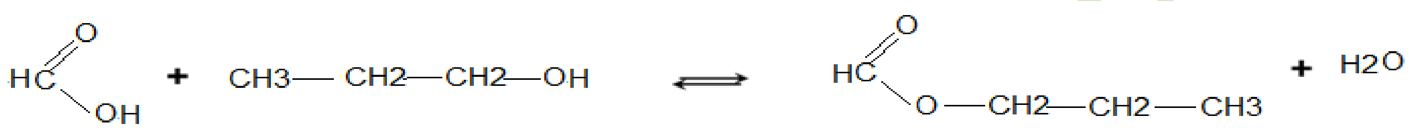
$$pK_A = -log\frac{4.10^{-2} \times (6{,}2.10^{-2})^2}{1-6{,}18.10^{-2}} = 3{,}78 \implies pK_A \approx 3{,}8$$

Partie II : Préparation d'un ester

1- La proposition juste :

b- Le temps de demi-réaction diminue si on utilise un catalyseur.

2- L'équation chimique de la réaction d'estérification en utilisant les formules semi-développées:



Le nom de l'ester formé : méthanoate de propyle

3- Montrons que l'état d'équilibre n'est atteint à l'instant t_1 :

Détermination de rondement de la réaction à l'instant t_1 :

Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$HCOOH + C_3H_7OH \rightleftarrows HCOC_3H_7 + H_2O$			
avancement	avancement	Quantité de matière en (mol)			
L'état	0	$0{,}2$	0	0	0
initial	x	$0{,}2-x$	x	x	x
intermédiaire	x_f	$0{,}2-x_f$	$0{,}2-x_f$	x_f	x_f

$$r = \frac{n_{exp}(ester)}{n_{th}(ester)} = \frac{x}{x_{max}}$$

Le mélange est équimolaire : $0{,}2 - x_{max} = 0 \rightarrow x_{max} = 0{,}2\,mol$

La quantité de matière de l'acide restant :

$$\begin{cases} n_A = 0{,}2 - x \\ n_A = \dfrac{m}{M} \end{cases} \implies \frac{m}{M} = 0{,}2 - x \implies x = 0{,}2 - \frac{m}{M}$$

$$x = 0{,}2 - \frac{6{,}9}{46}$$

$$x = 0{,}05\,mol$$

Le rendement est :

$$r' = \frac{x}{x_{max}} = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}025 \Longrightarrow \boldsymbol{r' = 25\ \%}$$

On remarque que :

$r' < r = 67\%$, donc l'équilibre chimique n'est atteint à l'instant t_1.

PHYSIQUE (13 points)

Les ondes

1- Diffraction de la lumière monochromatique

1-1- La proposition juste :

c- la fréquence de la lumière émise par le laser hélium-néon est :

$$\nu = \frac{C}{\lambda} = \frac{3.10^8}{633.10^{-9}} = 4{,}394.10^{14}\ Hz$$

1-2- Calcul de a :

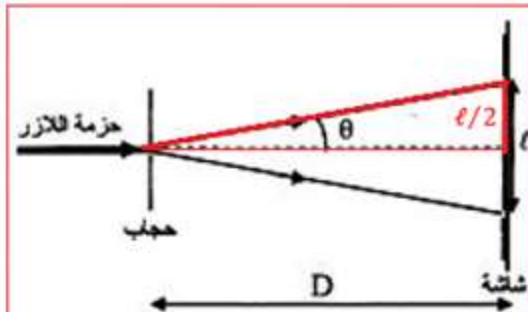


Figure 1

$$\theta = \frac{\lambda}{a}$$

$$tan\theta = \frac{\frac{L}{2}}{D} = \frac{\ell}{2D}$$

Pour les petits angles : $tan\theta \approx \theta$

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\lambda}{a} \\ \theta = \dfrac{\ell}{2D} \end{cases} \Longrightarrow \frac{\ell}{2D} = \frac{\lambda}{a} \Longrightarrow a = \frac{2\lambda D}{\ell}$$

$$a = \frac{2 \times 633.10^{-9} \times 1{,}5}{3{,}4.10^{-2}} = 5{,}58.10^{-5}\ m$$

$$\boldsymbol{a = 55{,}8\ \mu m}$$

1-3- La valeur de θ :

$$\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{633.10^{-9}}{55{,}8.10^{-6}} \Longrightarrow \boldsymbol{\theta = 1{,}13.10^{-2}\ rad}$$

-La valeur de largueur de la tache centrale :

$$\theta = \frac{\ell'}{2D'} \Longrightarrow \ell' = 2D'.\theta$$

$$\ell' = 2 \times 3 \times 1{,}13.10^{-2} = 6{,}78.110^{-2}\ m$$

$$\boldsymbol{\ell' \approx 6{,}8\ cm}$$

Remarque on peut utiliser la relation :

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\ell}{2D} \\ \theta = \dfrac{\ell'}{2D'} \end{cases} \Longrightarrow \frac{\ell'}{2D'} = \frac{\ell}{2D} \Longrightarrow \ell' = \frac{2D.\ell}{D} = 2\ell \Longrightarrow \boldsymbol{\ell' = 6,8\ cm}$$

2- Etude de la radiation émise par le laser He-Ne :

2-1- L'énergie du photon de la lumière émis :

$$E = h.\nu \Longrightarrow E = 6{,}63.10^{-34} \times 4{,}74.10^{14} = 3{,}143.10^{-19}\ J$$

$$E = \frac{3{,}143.10^{-19}}{1{,}6022.10^{-19}} \Longrightarrow \boldsymbol{E = 1,96\ eV}$$

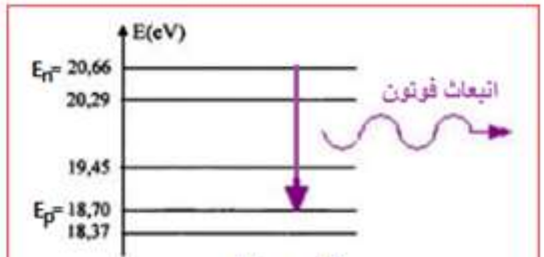


Figure 2

2-2- Détermination de E_n et E_p :

$$E = E_n - E_p \quad avec\ E = 1{,}96\ eV$$

$$20{,}66 - 18{,}70 = 1{,}96\ eV$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E_n = 20,66\ eV} \\ \boldsymbol{E_p = 18,70\ eV} \end{cases}$$

L'électricité : (5points)

1- Charge d'un condensateur et sa décharge

1-1- Montrons que $C = 20\ \mu F$:

L'équation de la courbe $q = f(u_{AB})$ s'écrit : $q = C.u_{AB}$

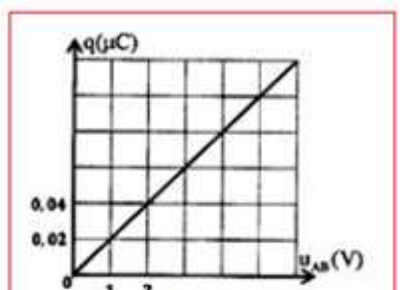


Figure 2

C est le coefficient directeur :

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta u_{AB}} = \frac{0{,}04.10^{-6} - 0}{2 - 0} = 20.10^{-9} F$$

$$\boldsymbol{C = 20\ nF}$$

1-2- La durée pour que $u_{AB} = 6V$:

$$\begin{cases} q = I_0.\Delta t \\ q = C.u_{AB} \end{cases} \Longrightarrow C.u_{AB} = I_0.\Delta t \Longrightarrow \Delta t = \frac{C.u_{AB}}{I_0} \Longrightarrow \Delta t = \frac{20.10^{-9} \times 6}{0{,}1 \times 10^{-6}} \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta t = 1,2\ s}$$

1-3-

1-3-1- L'équation différentielle vérifiée par la tension u_{AB} :

D'après la loi d'additivité des tensions : $u_{AB} + u_R = 0$

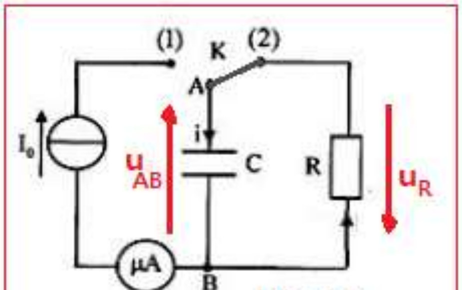


Figure 1

D'après la loi d'ohm : $u_R = R.i$ avec : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_{AB})}{dt} = C.\frac{du_{AB}}{dt}$

L'équation différentielle s'écrit : $R.C.\frac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = 0$

$$\boldsymbol{\frac{du_{AB}}{dt} + \frac{1}{R.C}.u_{AB} = 0}$$

1-3-2- La valeur de U_0 et de R :

La solution de L'équation différentielle est : $u_{AB}(t) = U_0.e^{-\alpha t}$ $c.à.d: \frac{du_{AB}}{dt} = -\alpha.U_0.e^{-\alpha t}$ On remplace dans L'équation différentielle :

$$-\alpha.U_0.e^{-\alpha t} + \frac{1}{R.C}.U_0.e^{-\alpha t} = 0$$

$$U_0.e^{-\alpha t}\left(-\alpha + \frac{1}{R.C}\right) = 0$$

$$-\alpha + \frac{1}{R.C} = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{R.C}$$

$$u_{AB}(t) = U_0.e^{-\alpha t} = U_0.e^{-\frac{t}{R.C}}$$

$$ln(u_{AB}) = \ln\left(U_0.e^{-\frac{t}{R.C}}\right) = lnU_0 - \frac{t}{R.C}$$

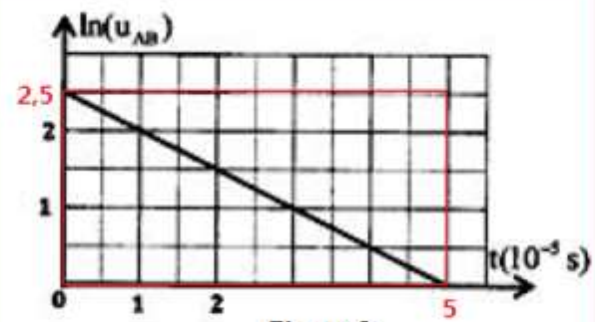


Figure 3

Graphiquement à t=0 on trouve : $ln(u_{AB}) = 2{,}5$

$ln(u_{AB}) = lnU_0 \Longrightarrow U_0 = e^{\ln(u_{AB})} \Longrightarrow U_0 = e^{2{,}5} = 12{,}18\,V \Longrightarrow \boldsymbol{U_0 \simeq 12{,}2\,V}$

Le coefficient directeur de la courbe $\ln(u_{AB}) = f(t)$:

$$\frac{-1}{R.C} = \frac{\Delta ln(u_{AB})}{\Delta t} = \frac{2{,}5 - 0}{0 - 5.10^{-5}} = -5.10^4\ s^{-1}$$

$$\frac{-1}{R.C} = -5.10^4 \Longrightarrow R = \frac{1}{5.10^4.C}$$

$$R = \frac{1}{5.10^4 \times 20.0^{-9}} = 1000\Omega \Longrightarrow \boldsymbol{R = 1k\Omega}$$

1-3-3- Détermination de t_1 :

$$E_e = \frac{1}{2}C.u_{AB}^2 = \frac{1}{2}C.(U_0.e^{-\frac{t}{R.C}})^2 = \frac{1}{2}C.U_0^2.e^{-\frac{2t}{R.C}}$$

L'énergie emmagasinée à t=0 est maximale :

$$E_{e\,max} = \frac{1}{2}C.U_0^2 \implies E_e = \frac{1}{2}C.U_0^2.e^{-\frac{2t}{R.C}} = E_{e\,max}.e^{-\frac{2t}{R.C}}$$

A t=0 :

$$E_e(t_1) = 37\%\,E_{e\,max} = 0{,}37\,E_{e\,max}$$

$$E_{e\,max}.e^{-\frac{2t_1}{R.C}} = 0{,}37E_{e\,max}$$

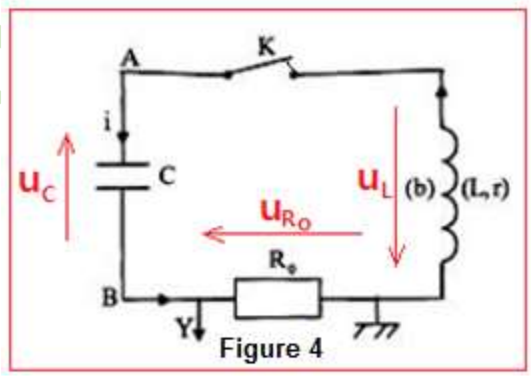
$$-\frac{2t_1}{R.C} = \ln(0{,}37)$$

$$t_1 = -\frac{1}{2}R.C.\ln(0{,}37) = -\frac{1}{2}\times 1.10^3 \times 20.10^{-9} \times \ln(0{,}37) = 9{,}94.10^{-6}\,s$$

$$\boldsymbol{t_1 \simeq 10\,\mu s}$$

2- Décharge du condensateur dans la bobine :

2-1- L'équation différentielle vérifiée par la tension $u_{R_0}(t)$:



D'après la loi d'additivité des tensions : $u_C + u_L + u_{R_0} = 0$

D'après la loi d'ohm $u_{R_0} = R_0.i$ et $u_L = L\frac{di}{dt} + r.i$

L'équation différentielle s'écrit : $L\frac{di}{dt} + r.i + R_0.i + u_C = 0$

$$L.\frac{di}{dt} + (R_0 + r).i + \frac{q}{C} = 0$$

Le dérivé donne :

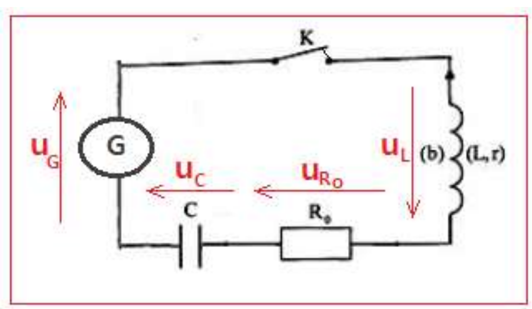
$$L.\frac{d^2i}{dt^2} + (R_0 + r).\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}.\frac{dq}{dt} = 0$$

$$L.\frac{d^2U_{R_0}}{dt^2} + (R_0 + r).\frac{dU_{R_0}}{dt} + \frac{1}{C}.U_{R_0} = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2U_{R_0}}{dt^2} + \frac{(R_0 + r)}{L}.\frac{dU_{R_0}}{dt} + \frac{1}{L.C}.U_{R_0} = 0}$$

2-2-1- Détermination de la valeur de r :

Loi d'additivité des tensions :



$$u_G = u_C + u_L + u_{R_0}$$

$$L.\frac{di}{dt} + (R_0 + r).i + u_C = k.i$$

$$L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R_0 + r - k).C.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

Pour que les oscillations soient sinusoïdales il faut que :

$$R_0 + r - k = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{r = k - R_0} = 20 - 12$$
$$\boldsymbol{r = 8\,\Omega}$$

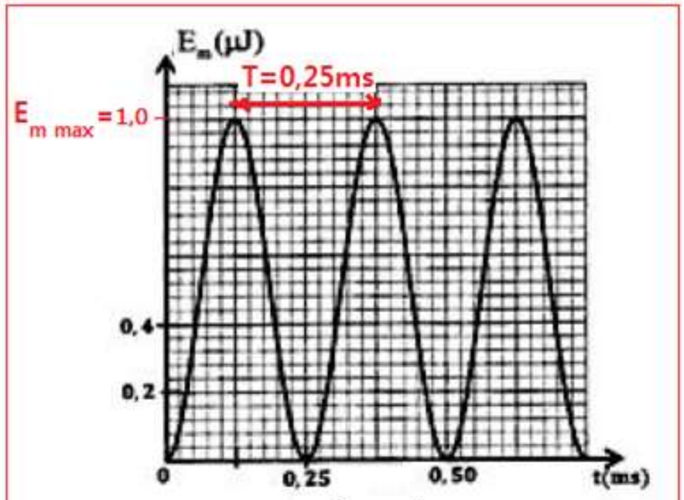


Figure 5

2-2-2- La valeur de L :

L'expression de la période propre :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$$

La période de l'énergie magnétique est :

$$T_0 = 2T$$
$$2T = 2\pi\sqrt{L.C} \Longrightarrow T^2 = \pi^2 L.C$$

Graphiquement la valeur de la période :

$$T = 0{,}25\,ms = 2{,}5.10^{-4}\,s$$
$$L = \frac{T^2}{\pi^2.C} \Longrightarrow L = \frac{(2{,}5.10^{-4})^2}{10 \times 20.10^{-9}} = 0{,}3125H$$
$$\boldsymbol{L = 312{,}5\,mH}$$

- La valeur de $U_{C\,max}$:

L'énergie totale du circuit se conserve :

$$E_T = E_{e\,max} = E_{m\,max}$$
$$E_{m\,max} = \frac{1}{2}C.U_{C\,max}^2$$

Graphiquement on trouve : $E_{m\,max} = 2\,\mu J = 2.10^{-6}\,J$

$$U_{C\,max} = \sqrt{\frac{2E_{m\,max}}{C}}$$
$$U_{C\,max} = \sqrt{\frac{2 \times 2.10^{-6}}{20.10^{-9}}} \Longrightarrow \boldsymbol{U_{C\,max} = 10V}$$

3- Réception d'une onde électromagnétique

3-1- La proposition juste :

d- Dans une antenne réceptrice, l'onde électromagnétique engendre un signal électrique de même fréquence.

3-2- Peut-on recevoir l'onde de fréquence $N_0 = 40\ kHz$ si $C_0 = 20\ nF$?

Déterminons tout d'abord la fréquence propre du circuit L_0C_0 :

$$T_0 = \frac{1}{N} = 2\pi\sqrt{L_0.C_0} \quad \Rightarrow N = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0.C_0}}$$

$$N = \frac{1}{2\sqrt{10} \times \sqrt{0{,}781.10^{-3} \times 20 \times 10^{-9}}} = 40\ 006\ Hz \ \Rightarrow N_0 = N = 40\ kHz$$

Donc le circuit peut recevoir l'onde de fréquence $\boldsymbol{N_0 = 40\ kHz}$ **.**

3-3- L'intervalle de valeurs C_x :

$$T_0 \ll R.C_E < T_i$$

Avec C_E la capacité équivalente des deux condensateurs montés en parallèle tel que : $C_E = C + C_x$

$$\frac{1}{N_0} \ll R.(C + C_x) < \frac{1}{N_i} \Rightarrow \frac{1}{R.N_0} \ll C + C_x < \frac{1}{R.N_i}$$

$$\frac{1}{R.N_0} - C \ll C_x < \frac{1}{R.N_i} - C \ \Rightarrow \frac{1}{40.10^3 \times 10^3} - 20.10^{-9} \ll C_x < \frac{1}{4.10^3 \times 10^3} - 20.10^{-9}$$

$$5.10^{-9} \ll C_x < 2{,}3.10^{-7}\ F$$

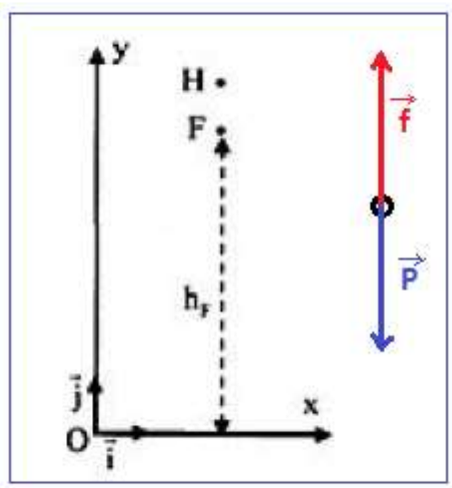
$$\boldsymbol{5\ nF \ll C_x < \ 230\ nF}$$

MECANIQUE : (5,25 points)

Partie *I* : Etude du mouvement de chute de deux corps

1- Etude de la chute d'un corps avec frottement :

1-1- Equation différentielle :



Système étudié :{Corps(A)}

Bilan des forces :

$\vec{P}$: Poids du corps $\vec{P} = m_A.\vec{g}$

$\vec{f}$: Force de frottement de fluide $\vec{f} = -k\ \vec{V}_A$

On applique la deuxième loi de Newton dans le repère $R(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$ supposé galiléen.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_A.\vec{a}_A$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m_A.\frac{d\,\vec{V}_A}{dt}$$

$$m_A.\vec{g} - -k\,\vec{V}_A = m_A.\frac{d\,\vec{V}_A}{dt}$$

Projection sur l'axe Oy :

$$m_A.g - k\,V_{Ay} = m_A.\frac{d\,V_{Ay}}{dt} \quad \Longrightarrow m_A.\frac{d\,V_{Ay}}{dt} + k\,V_{Ay} + m_A.g = 0$$

$$\frac{d\,V_{Ay}}{dt} + \frac{k}{m_A}.V_{Ay} + g = 0$$

On pose $\boldsymbol{\tau = \frac{m_A}{k}}$ **et on obtient :**

$$\boldsymbol{\frac{d\,V_{Ay}}{dt} + \frac{V_{Ay}}{\tau} + g = 0} \quad (1)$$

1-2- Détermination de la valeur de τ :

En régime permanant la vitesse est constante $V_{LAy} = cte$ d'où $\frac{dV_{LAy}}{dt} = 0$, l'équation différentielle (1) s'écrit :

$$\frac{V_{LAy}}{\tau} + g = 0 \;\Longrightarrow \frac{V_{LAy}}{\tau} = -g \;\Longrightarrow \tau = -\frac{V_{LAy}}{g}$$

D'après le graphe de la figure 2 la vitesse limite est $V_{LAy} = -1m.s^{-1}$ d'où :

$$\tau = -\frac{(-1)}{10} \Longrightarrow \boldsymbol{\tau = 0,1\,s}$$

Déduction de la valeur de k :

On a: $\tau = \frac{m_A}{k} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = \frac{m_A}{\tau}}$

$$k = \frac{0,5}{0,1} \Longrightarrow \boldsymbol{k = 5\,kg.s^{-1}}$$

1-3- La vitesse de $V_{Ay}\,(t_i)$ en utilisant la méthode d'Euler :

$$\frac{d\,V_{Ay}}{dt} + \frac{V_{Ay}}{\tau} + g = 0 \quad \Longrightarrow a_{Ay} = -\frac{V_{Ay}}{\tau} - g$$

$$a_{i-1} = -\frac{V_{i-1}}{\tau} - g$$

$$\begin{cases} a_{i-1} = -\dfrac{V_{i-1}}{\tau} - g \;\Longrightarrow \dfrac{V_{i-1}}{\tau} = -a_{i-1} - g \;\Longrightarrow V_{i-1} = -\tau.(\,a_{i-1} + g) \\ V_i = a_{i-1}.\Delta t + V_{i-1} \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

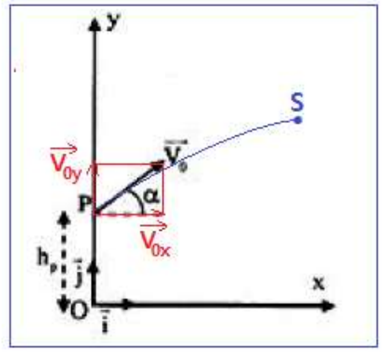
$$\boldsymbol{V_i = a_{i-1}.\Delta t - \tau.(\,a_{i-1} + g)} \Longrightarrow$$

$$V_i = -4{,}089 \times 0{,}01 - 0{,}1 \times (-4{,}089 + 10)$$

$$V_i = \mathbf{0,632\ m.s^{-1}}$$

2- Etude du mouvement d'un mouvement d'un projectile

2-1- Les équations horaires $x_A(t)$ et $y_A(t)$:



Système étudié :{Corps(A)}

Bilan des forces :

$\vec{P}$: Poids du corps $\vec{P} = m_A.\vec{g}$

On applique la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_B.\vec{a}_B$$

$$\vec{P} = m_B.\vec{a}_B$$

$$m_B.\vec{g} = m_B.\vec{a}_B$$

$$\vec{a}_B = \vec{g}$$

Les conductions initiales :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h_P \end{cases} \quad et \quad \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0.cos\alpha \\ V_{0y} = V_0.sin\alpha \end{cases}$$

La projection sur les axes Ox et Oy :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{d\,V_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{d\,V_y}{dt} = -g \end{cases} \xrightarrow{\text{تكامل}} \vec{V}\begin{cases} V_x = V_{0x} \\ V_y = -g.t + V_{0y} \end{cases}$$

$$\vec{V}\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = V_0.cos\alpha \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = -g.t + V_0.sin\alpha \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تكامل}} \begin{cases} x_B(t) = V_0.cos\alpha.t + x_0 \\ y_B(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + V_0.sin\alpha + y_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_B(t) = 20cos\alpha.t} \\ \boldsymbol{y_B(t) = -5.t^2 + 20sin\alpha.t + 1,8} \end{cases}$$

2-2- Les coordonnés du point S :

Au sommet de la trajectoire la vitesse est horizontale : $V_y\,(S) = 0$ donc : $-g.t_S + V_0.sin\alpha = 0$

$$t_S = \frac{V_0.sin\alpha}{g}$$

$$x_S(t_S) = V_0.cos\alpha.t_S = V_0.cos\alpha.\frac{V_0.sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2\,2cos\alpha.sin\alpha}{2g} = \frac{V_0^2\,sin2\alpha}{2g} = \frac{20^2}{2\times 10}.sin2\alpha$$

$$\boldsymbol{x_S = 20sin2\alpha}$$

$$y_S(t_S) = -\frac{1}{2}g.t_s{}^2 + V_0.sin\alpha.t_s + h_p = -\frac{1}{2}g.(\frac{V_0.sin\alpha}{g})^2 + V_0.sin\alpha.\frac{V_0.sin\alpha}{g} + h_p$$

$$y_S(t_S) = -\frac{V_0^2.sin^2\alpha}{2g} + \frac{V_0^2.sin^2\alpha}{g} + h_p = \frac{V_0^2.sin^2\alpha}{2g} + h_p = \frac{20^2}{2\times 10}.sin^2\alpha + 1{,}8$$

$$\boldsymbol{y_S = 20sin^2\alpha + 1,8}$$

3- La détermination de α pour que les deux corps se rencontre en S :

$$y_A = y_B = y_S$$

Le corps (A) a un mouvement rectiligne uniforme à partir du point F, il traverse la distance $d = h_F - y_S$ pendant la durée $t_S = \frac{V_0.sin\alpha}{g}$ avec : $d = -V_L.t_S$

$$-V_L.t_S = h_F - y_S$$

$$-V_L.\frac{V_0.sin\alpha}{g} = h_F - 20sin^2\alpha - 1{,}8$$

$$20sin^2\alpha - (-1)\times\frac{20}{10}sin\alpha + 1{,}8 - 18{,}5 = 0$$

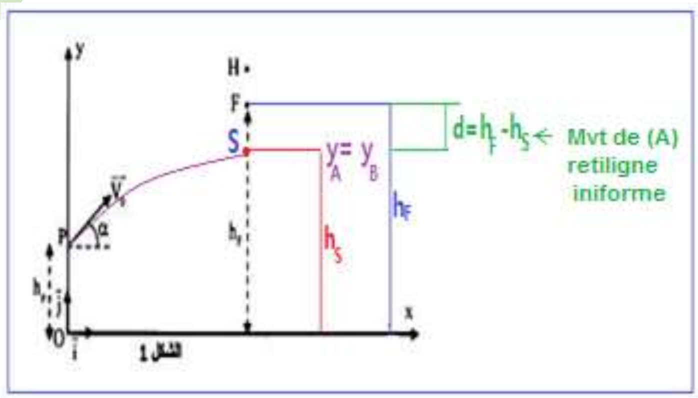
$$20sin^2\alpha + 2sin\alpha - 16{,}7 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4\times 20\times(-16{,}7) = 1340$$

$$sin\alpha_1 = \frac{-2-\sqrt{1340}}{2\times 20} = -0{,}965 \rightarrow \alpha_1 < 0$$

$$sin\alpha_2 = \frac{-2+\sqrt{1340}}{2\times 20} = 0{,}865 \rightarrow \alpha_2 = 59{,}88\,° \Rightarrow \alpha_2 \simeq 60°$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \boldsymbol{\alpha_2 = 60°}$$



Partie *II* : Etude du mouvement d'un pendule pesant

1- L'expression E_{pp} de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule :

$$E_{pp} = mgz + cte$$

On choisissant le plan horizontale passant par G_0 comme état de référence de E_{pp} :

$$E_{pp} = mgz$$

$$z = OG_0 - OH = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}cos\alpha = \frac{L}{2}(1-cos\alpha)$$

$$E_{pp} = \frac{1}{2}mgL(1-cos\alpha)$$

$$cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$E_{pp} = \frac{1}{2}mgL\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right] \Longrightarrow \boldsymbol{E_{pp} = \frac{1}{4}mgL.\theta^2}$$

2- Equation différentielle :

L'expression de l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_{pp}$

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mgL.\theta^2$$

Les frottements sont négligeables donc $E_m = Cte$ et $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgL.\theta\dot{\theta} = 0$$

$$J_\Delta\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgL.\theta = 0$$

$$\frac{1}{3}m.L^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgL.\theta = 0$$

$$L\ddot{\theta} + \frac{3}{2}g.\theta = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{d^2t} + \frac{3g}{2L}\theta = 0}$$

3-1- Détermination de g :

L'expression de la période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$ Sachant que la période propre est 2 fois la période énergétique :

$$T_0 = 2T \Longrightarrow 2T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \Longrightarrow T^2 = \pi^2\frac{2L}{3g} \Longrightarrow g = \frac{2\pi^2 L}{3T^2}$$

Graphiquement $T = 0{,}6\ s$

$$g = \frac{2 \times 10 \times 0{,}53}{3 \times (0{,}6)^2} \Longrightarrow \boldsymbol{g = 9{,}81\ m.s^{-2}}$$

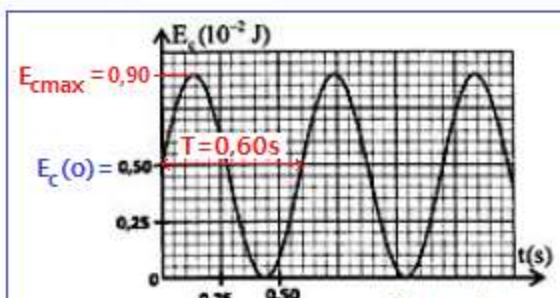


Figure 2

3-2- la valeur de θ_m :

$$E_m = E_{c\,max} = E_{pp\,max}$$

$$E_{c\,max} = \frac{1}{4}mgL.\theta_m^2$$

$$\theta_m = \sqrt{\frac{4E_{c\,max}}{mgL}} \Longrightarrow \theta_m = \sqrt{\frac{4 \times 9.10^{-3}}{0{,}1 \times 9{,}81 \times 0{,}53}} \Longrightarrow \boldsymbol{\theta_m = 0{,}62\ rad}$$

$$\boldsymbol{= 15°}$$

3-3- La valeur de φ :

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m \sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$$

On remplace dans l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}m.L^2\left[-\frac{2\pi}{T_0}\theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right]^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\frac{m.L^2.\theta_m^2}{6}sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) =$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{3g}{2L}$$

$$E_C = \frac{3g}{2L}.\frac{m.L^2.\theta_m^2}{6}sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = \frac{1}{4}m.g.L.\theta_m^2\, sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$E_C(0) = \frac{1}{4}m.g.L.\theta_m^2\, sin^2\,\varphi$$

$$sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{4.E_C(0)}{m.g.L.\theta_m^2}} = \pm\frac{2}{\theta_m}\sqrt{\frac{E_C(0)}{m.g.L}}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m \sin\varphi < 0 \;\Longrightarrow sin\varphi > 0 \;\Longrightarrow \varphi > 0$$

$$sin\varphi = \frac{2}{\theta_m}\sqrt{\frac{E_C(0)}{m.g.L}} \Longrightarrow sin\varphi = \frac{2}{0{,}26}\sqrt{\frac{5.10^{-3}}{0{,}1\times 9{,}81\times 0{,}53}} = 0{,}75$$

$$\boldsymbol{\varphi \simeq 0,848rad \simeq 48,6°}$$